

Über Beziehungen zwischen Kegelschnittbüscheln und rationalen Curven dritter Classe.

Von **Michael Trebitscher,**
ord. Hörer der phil. Facultät in Wien.

1. Die unendlich weiten Punkte der einzelnen Elemente eines Kegelschnittbüschels bilden eine Involution. Darin liegt begründet, dass jeder Kegelschnitt desselben durch seine Axenrichtungen individualisirt ist. Construiren wir nämlich in einer Strahleninvolution für jedes Paar derselben die zwei, auf einander senkrecht stehenden Halbirungsstrahlen der durch das Paar gebildeten Winkel, so müssen die so erhaltenen Strahlenpaare sämmtlich von einander verschieden sein oder alle in eines zusammenfallen; denn bildet ein solches Strahlenpaar die Halbirungsstrahlen von zwei Paaren der Involution, so muss dasselbe als Strahlenpaar, welches zwei andere Strahlenpaare desselben Büschels harmonisch trennt, das Doppelelementenpaar für die durch jene Strahlenpaare bestimmte Involution sein, woraus der Satz unmittelbar hervorgeht. Wenden wir diesen Satz auf die Strahleninvolution an, welche wir erhalten, wenn wir die Paare der Asymptotenrichtungen der Kegelschnitte des Büschels aus irgend einem Punkte projiciren und ziehen in Betracht, dass jetzt die Halbirungsstrahlen die Axenrichtungen enthalten, so sehen wir, dass, wenn in einem Kegelschnittbüschel auch nur ein Kegelschnittspaar nicht durch seine Axenrichtungen individualisirt ist, alle Elemente desselben dieselben Axenrichtungen haben müssen, und dass dies nur dann eintritt, wenn die Involution der Asymptotenrichtungspaare ein Punktepaar als Doppelelementenpaar besitzt, welches die imaginären Kreispunkte harmonisch trennt, d. h. wenn in dem Büschel ein Kreis enthalten ist, oder, was dasselbe ist, wenn die Axen der zwei Parabeln, welche das Büschel enthält, auf einander senkrecht stehen.

2. Der Ort der Mittelpunkte für das Kegelschnittbüschel ist bekanntlich wieder ein Kegelschnitt U_2. Bringen wir diese Wahrheit mit der eben abgeleiteten in Verbindung, so bemerken wir, dass die Axen der Kegelschnitte eines Büschels als Erzeugniss einer 1—2deutigen Beziehung zwischen U_2 und der unendlich weiten Geraden $K\infty$ auftreten. Jedem Kegelschnitte sind nämlich projectivisch auf U_2 sein Mittelpunkt, auf $K\infty$ seine Axenrichtungen zugewiesen.

Durch Vermittelung des Kegelschnittbüschels entsprechen also jedem Punkte von U_2 zwei Punkte der unendlich weiten Geraden, jedem Punkte dieser aber nur ein Punkt von U_2. Weil von den zwei Axenrichtungen einer Parabel eine zugleich den Mittelpunkt derselben bildet, hat noch diese 1—2deutige Verwandtschaft speciell die Eigenschaft, dass die gemeinsamen Punkte und φ der Träger, die Schnittpunkte von U_2 mit $K\infty$ einmal sich selbst entsprechen. Wollen wir nun die Classe für die Enveloppe aller Verbindungslinien entsprechender Punkte von U_2 und $K\infty$ bestimmen, so brauchen wir nur die Anzahl der Doppelelemente zweier concentrischer 1—4deutiger Strahlenbüschel zu finden, welche wir in einem beliebigen Punkte p der Ebene erhalten, wenn wir aus diesem einerseits das oben definirte Punktsystem auf $K\infty$, welches die imaginären Kreispunkte als Doppelelemente besitzt, anderseits das auf dieses projectivisch bezogene Punktcontinuum von U_2 projiciren. Von den in einer solchen conlocalen Verwandtschaft erster Stufe auftretenden 5 Doppelstrahlen sind zwei die von p nach den Mittelpunkten ε und φ der zwei Parabeln gerichteten Strahlen, welche ja zwei entsprechende, zusammenfallende Punkte verbinden. Die gesuchte Umhüllungscurve zerfällt daher in die zwei Parallelstrahlenbüschel (ε) und (φ) und in eine Curve dritter Classe, welche im Allgemeinen nicht mehr degeneriren kann; sie muss ja $K\infty$ als Doppeltangente haben, weil von jedem Punkte dieser Geraden — wegen der 1—2deutigen Beziehung — ausser ihr selbst nur noch ein Strahl des Erzeugnisses geht; und zwar tritt $K\infty$ durch die Punkte in das Erzeugniss ein, welche den Punkten und φ ausser ihnen selbst noch auf $K\infty$ entsprechen, das sind die zu $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$ bezüglich der imaginären Kreispunkte conjugirten Punkte ε'_1 und φ'_1. Die nach Trennung der Parallelstrahlenbüschel (ε) und (φ) übrig-

gebliebene Enveloppe könnte daher höchstens in eine Parabel und in ein Parallelstrahlenbüschel (ε'_1) oder (φ'_1) zerfallen. Die Strahlen dieses Büschels würden U_2 in je zwei Punkten schneiden, von welchen der eine durch die Verwandtschaft den betreffenden Strahl selbst erzeugen müsste; dieser Schnittpunkt wäre also — nach der obigen Feststellung der 1—2deutigen Beziehung — der Mittelpunkt für denjenigen Kegelschnitt, für welchen der Strahl eine Axe ist. Die sämmtlichen Strahlen des Parallelstrahlenbüschels könnten aber nur Axen für einen und denselben Kegelschnitt sein, weil wir nur den allgemeinen Fall betrachten, in welchem jeder Kegelschnitt des Büschels durch seine Axenrichtungen individualisirt ist. Es geht also aus dieser Untersuchung hervor, dass die Umhüllungscurve der Axen, als Curve dritter Classe, für diejenigen Kegelschnittbüscheln, welche keinen Kreis enthalten nur dann zerfallen kann, wenn in dem Büschel ein Kegelschnitt enthalten ist, welcher unendlich viele Mittelpunkte besitzt, d. h. eine degenerirte Parabel, oder, was dasselbe ist (man vergl. meine Abhandlung: „Über die Reduction etc.“ Sitzungsberichte der kais. Akad. der W. Nov.-Heft, 1879), wenn U_2 degenerirt. Im Allgemeinen ist also die Umhüllungscurve der Axen für das Kegelschnittbüschel eine einfache Curve dritter Classe, welche die unendlich weite Gerade in den Nebenaxenrichtungen ε'_1 und φ'_1 seiner zwei Parabeln berührt.

3. Welche die aus den Punkten von $K\infty$ gehenden Strahlen der Enveloppe sind, ist schon erwähnt worden. Ich will noch die Natur der Strahlentripel näher bestimmen, welche aus jedem Punkte von U_2 an die Enveloppe gehen. Jede Axe schneidet U_2 in zwei Punkten, von welchen der eine α den Mittelpunkt für den der Axe zugehörigen Kegelschnitt bildet und ihr daher vermöge der früher definirten Beziehung eindeutig zugeordnet ist, der andere β den Mittelpunkt eines anderen Kegelschnittes darstellt und mit der Axe auch rational verknüpft ist. Greifen wir diesen letzteren Punkt heraus, so gehen durch ihn vom Erzeugnisse erstens diese Axe, dann aber noch die zwei auf einander senkrecht stehenden Axen des Kegelschnittes, welcher ihn als Mittelpunkt besitzt. Da durch jeden Punkt von U_2 ausser der zwei, ihm vermöge der festgestellten 1—2deutigen Beziehung ange-

hörigen Axen immer und nur noch eine Axe gehen kann, so besteht zwischen den Richtungen der Axen und den zugehörigen β-Punkten von U_2 eine Projectivität: jeder Richtung entspricht nur eine Axe, jeder Axe nur ein Punkt von U_2 als β, jedem Punkte von U_2 nur eine solche Axe und endlich jeder Axe nur eine Richtung.

Die Umhüllungscurve der Axen kann daher auch als Erzeugniss der projectivisch auf einander bezogenen U_2 und $K\infty$ aufgefasst werden. In dieser projectivischen Beziehung entsprechen den gemeinsamen Punkten ε und φ der Träger, wenn wir sie zu U_2 rechnen, die früher definirten Punkte φ'_1 und ε'_1 resp.

4. Vermöge dieser Projectivität können beliebig viele Tangenten der in Rede stehenden Umhüllungscurve linear construirt werden, nachdem man einem Punkte a von U_2 in dem früher festgestellten Sinne den zugehörigen Punkt a' auf $K\infty$ zugeordnet hat. Damit ist zugleich die Rationalität der Umhüllungscurve direct gezeigt und sowohl auf U_2 als auf $K\infty$ eine Abbildung derselben gegeben, indem jeder Punkt dieser Träger — vermöge der Projectivität — nur eine Axe darstellt und jeder andere Punkt eine andere. Die zwei Bilder der Doppeltangente $K\infty$ sind auf U_2 ε und φ, auf $K\infty$ φ'_1 und ε'_1.

5. Weil die conjugirten Tangenten einer rationalen Curve dritter Classe auf ihr eine Involution bilden, deren Doppelelemente die Nachbartangenten der Doppeltangente sind, so bildet sich diese Involution für unsere Umhüllungscurve auf U_2 durch die Punktinvolution ab, deren Doppelpunkte ε und φ sind. Daraus folgt dass die durch diametral gegenüberliegende Punkte von U_2, welche Mittelpunkte von conjugirten Kegelschnitten sind, gehenden dritten, d. h. die nach Absonderung der senkrechten Tangentenpaare übrig gebliebenen Strahlen der Enveloppe conjugirte Tangenten derselben sind.

Jede Tangenteninvolution der Curve dritter Classe, deren Paare sich auf einer Tangente der Curve durchschneiden, zu welchen daher als Paar auch die Nachbartangenten der Doppeltangente gehören, wird auf U_2 durch eine Involution abgebildet, deren Centrum auf $K\infty$ liegt; und umgekehrt stellt jede Punktinvolution von U_2, deren Centrum unendlich weit ist, eine solche

sogenannte centrale Tangenteninvolution der Curve dritter Classe dar. Eine solche Punktinvolution von U_2 ist auch diejenige, welche durch die Mittelpunkte der ähnlichen Kegelschnitte des Büschels gebildet wird (man vergleiche meine oben citirte Abhandlung). Daraus folgt der Satz: die durch zwei Mittelpunkte von ähnlichen Kegelschnitten des Büschels an die Enveloppe der Axen gehenden dritten Strahlen schneiden sich in derselben Tangente der Curve.

6. Durch Zählung der Bedingungen erkennt man, dass jede Curve dritter Classe, welche $K\infty$ als Doppeltangente besitzt, als Umhüllungscurve der Axen betrachtet werden kann, und zwar noch für unendlich viele Kegelschnittbüschel, für deren Bestimmung noch ein Basispunkt beliebig gewählt werden kann; der Ort U_2 der Mittelpunkte ist aber als Involutionskegelschnitt der senkrechten Tangenten der Umhüllungscurve durch dieselbe schon eindeutig bestimmt, während zu einem Orte der Mittelpunkte noch unendlich viele Umhüllungscurven gehören, da für die Bestimmung der Projectivität zwischen U_2 und $K\infty$ noch eine Bedingung frei ist: denn dadurch, dass den 2 Punkten ε und φ von U_2 die Punkte φ'_1, ε'_1 von $K\infty$ entsprechen, ist der Charakter von U_2 als Involutionskegelschnitt der senkrechten Tangenten für das ebenfalls schon dadurch als Umhüllungscurve der Axen charakterisirte Erzeugniss schon bestimmt.

Betrachtet man z. B. die Steiner'sche Hypocycloide als Umhüllungscurve der Axen, so ist der zugehörige Mittelpunktskegelschnitt U_2 ein Kreis (die Punkte φ'_1 ε'_1 sind hier die imaginären Kreispunkte, mit welchen demzufolge auch ε und φ zusammenfallen) und das Kegelschnittbüschel enthält lauter gleichseitige Hyperbeln. Man sieht zugleich, dass die Umhüllungscurve der Axen für ein Kegelschnittbüschel, welches aus lauter gleichseitigen Hyperbeln besteht, immer eine Steiner'sche Hypocycloide ist.

7. Die Realität der Spitzen der Umhüllungscurve hängt, nach bekannten Sätzen, von der Realität der Punkte ε und φ ab. Ist U_2 eine Ellipse, so sind alle drei Spitzen reell, ist U_2 eine Hyperbel so sind zwei Spitzen imaginär, fallen die zwei Parabeln des Kegelschnittbüschels zusammen, so ist auch $\varphi'_1 \equiv \varepsilon'_1$ und die

Curve dritter Classe hat $K\infty$ als Inflexionstangente und ist daher eine Curve dritter Ordnung.

8. Abgesehen von dem Falle, wo in dem Büschel ein Kreis enthalten ist, wo also U_2 eine gleichseitige Hyperbel ist, konnte — nach früheren Untersuchungen — unsere Curve dritter Classe nur noch degeneriren, wenn U_2 degenerirt. Dass in diesem Falle die Umhüllungscurve der Axen auch wirklich degenerirt, zeigt folgende Überlegung. Der eine Bestandtheil von U_2 ist in diesem Falle die Mittellinie der degenerirten Parabel, welche in dem Büschel enthalten sein muss. Jedem Punkte dieser Geraden G entspricht in dem Sinne der früher festgestellten 1—2deutigen Beziehung auf $K\infty$ die Richtung der Geraden und die darauf senkrechte Richtung ε'_1. Der andere Bestandtheil G_1 von U_2 enthält die Mittelpunkte aller Kegelschnitte des Büschels; von jedem Punkte derselben gehen zwei auf einander senkrechte Strahlen der Enveloppe als Axen des zugehörigen Kegelschnittes und ausserdem ein Strahl des Parallelstrahlenbüschels (ε'_1). Die früher definirte projectivische Beziehung zwischen U_1 und $K\infty$ ist also jetzt vertreten durch eine Beziehung, vermöge welcher jedem Punkte von G_1 derselbe Punkt ε'_1 entspricht, jedem Punkte von G aber immer eine von $K\infty$ und umgekehrt entspricht. Die Enveloppe besteht daher aus dem Parallelstrahlenbüschel (ε'_1) und aus einer Parabel für welche G eine Tangente und G_1, als Ort der Schnittpunkte senkrechter Tangenten, die Directrix ist. Sind beide Parabeln des Büschels degenerirt, so degenerirt auch noch diese Parabel, und die Enveloppe besteht jetzt aus den Parallelstrahlenbüscheln (ε'_1) und (φ'_1) und aus einem Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Doppelpunkt von U_2, der gemeinsame Mittelpunkt aller Kegelschnitte des Büschels ist.

9. Dieselben Untersuchungen, die wir hier für die Umhüllungscurve der Axen durchführten, gelten auch für die Umhüllungscurve der Asymptoten, mit dem Unterschiede, dass dieselbe die unendlich weite Gerade nicht in ε'_1 und φ'_1 sondern in ε und φ selbst berührt, weil die Asymptotenrichtungen der Kegelschnitte eines Büschels eine Involution bilden, deren Doppelpunkte ε und φ sind, während die Involution der Axenrichtungen die imaginären Kreispunkte als Doppel-

punkte besass. Die Projectivität zwischen U_2 und $K\infty$, als deren Erzeugniss auch die Umhüllungscurve der Asymptoten auftritt, hat hier daher die Eigenschaft, dass die gemeinsamen Punkte ε und φ der Träger sich wechselseitig entsprechen. Eine solche Projectivität zwischen einer Geraden G und einem Kegelschnitte C_2 lässt sich — wie gleich gezeigt werden wird — in sehr einfacher Weise vervollständigen.

10. Projicirt man die schon durch ein Paar entsprechender Punkte a—a' bestimmten, entsprechenden Punktepaare x—x' von C_2 und G aus einem beliebigen Punkte s von C_2 durch Strahlenpaare χ—χ', so bilden diese eine Involution, weil sie ein geschlossenes Strahlenpaar enthalten, welches durch Projection des geschlossenen Punktepaares $(e = f')$ — $(e' = f)$ entsteht, das den Trägern C_2 und G gemeinsam ist. Wählen wir s als zweiten Schnittpunkt der Verbindungslinie (xa') mit C_2, so ist $(sx) \equiv (sa')$ und weil dem Strahle (sa') als χ' (sa) als χ entspricht, ist auch demselben Strahle $(sa') \equiv (sx)$ als χ (sa) als χ' zugeordnet, d. h. der dem Punkte x von C_2 entsprechende Punkt x' von G wird als Schnittpunkt von (as) mit G gefunden, wenn s den zweiten Schnittpunkt der Geraden (xa') mit C_2 bedeutet. Derselbe Satz kann auch so ausgesprochen werden: „Ist die Projectivität zwischen einem Kegelschnitte C_2 und einer Geraden G von der Beschaffenheit, dass sich die gemeinsamen Elemente e, f gegenseitig entsprechen, und sind drei Punkte a, s, x so auf C_2 gelegen, dass einem unter ihnen, z. B. dem Punkte a der Schnittpunkt a' der ihm gegenüberliegenden Seite (sx) des Dreieckes (asx) mit G entspricht, so haben auch die übrigen zwei Punkte s und x diese Eigenschaft: „dem Punkte x entspricht der Schnittpunkt von (as), dem Punkte s der von (ax) mit G."

Das Erzeugniss solcher projectivischer Kegelschnitte C_2 und G ist natürlich eine Curve dritter Classe, welche G in den gemeinsamen Punkten e, f der Träger berührt. — Es lässt sich leicht zeigen, dass der Cayley'sche Kegelschnitt des Erzeugnisses C_2 selbst ist. (Verallgemeinert lautet der Satz: Das Erzeugniss projectivischer Geraden und Kegelschnitte ist eine Curve dritter Classe, für welche die Gerade die Doppeltangente und der Kegelschnitt einen Involutionskegelschnitt bildet.)

Denn wegen der Projectivität stellt jeder Punkt des Kegelschnittes C_2 und der Geraden G nur einen Strahl der Enveloppe dar und jeder andere Punkt einen andern. Das Erzeugniss ist daher auf beiden Trägern abgebildet, und die Involution der conjugirten Tangenten wird auf ihnen durch die Involution dargestellt, deren Doppelpunkte die Bilder $e = f'$, $f = e'$ der Doppeltangente ist. Aus den Polareigenschaften eines Kegelschnittes ist aber unschwer zu ersehen, dass, wenn man ein Paar $x - x_1$ einer Punktinvolution auf demselben aus einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes auf die Axe der Involution projicirt, das so erhaltene Punktepaar $x' - x'_1$ die Schnittpunkte e, f der Axe mit dem Kegelschnitte harmonisch trennt, und — umgekehrt — verbindet man ein solches Punktepaar $x' - x'_1$ mit irgend einem Paare $x - x_1$ so schneiden sich die Verbindungslinien $(x x')$ und $(x_1 x'_1)$ in einem Punkte des Kegelschnittes. Die conjugirten Tangentenpaare des Erzeugnisses der projectivischen Träger C_2 und G schneiden sich daher als Verbindungslinien ihrer zu e, f harmonisch conjugirten Bilder auf C_2 und G immer in einem Punkte von C_2, d. h. C_2 ist der Cayley'sche Kegelschnitt desselben.

11. Demzufolge ist die Umhüllungscurve der Asymptoten für ein Kegelschnittbüschel eine Curve dritter Classe, welche die $K\infty$ in den Mittelpunkten der zwei, dem Büschel angehörigen Parabeln berührt, und für welche der Mittelpunktskegelschnitt U_2 den Cayley'schen Kegelschnitt bildet. Auch hier sind daher die durch Gegenpunkte von U_2 (ausser den zugehörigen Asymptoten noch hindurchgehenden) dritten Strahlen des Erzeugnisses conjugirte Tangenten, welche sich aber hier auf U_2 selbst durchschneiden, und für welche — wie unmittelbar ersichtlich ist — der Schnittpunkt selbst der zugehörige Mittelpunkt ist. Die Asymptotenpaare der Kegelschnitte eines Büschels sind also conjugirte Tangenten der Umhüllungscurve derselben und schneiden den Ort der Mittelpunkte U_2 ausser in ihrem Schnittpunkte in Gegenpunkten.

12. Betrachten wir die drei durch den Mittelpunkt von U_2 gehenden Strahlen der Enveloppe, welche bekanntlich die Spitzentangenten der Curve dritter Classe bilden. Der eine der Schnittpunkte (α) eines solchen Strahles mit U_2 ist der ihm als Asymptote zugehörige Mittelpunkt, der andere (β) ist sein Bild. Die dem

ersten (α) noch angehörige zweite Asymptote ist — nach früheren — die demselben zukommende conjugirte Tangente und muss daher U_2 ausser in dem zugehörigen Mittelpunkte α in einem Punkte schneiden, welcher der Gegenpunkt von β ist, d. h. wieder in α und daher U_2 in α berühren. Da die drei durch einen Punkt von U_2 gehenden Tangenten der Enveloppe die zwei ihm zugehörigen Asymptoten sind und der Strahl ist, welcher durch den betreffenden Punkt abgebildet ist, und weil die Tangente in α diesen Punkt zugleich als Mittelpunkt und als Abbild besitzt, so vertritt dieselbe zwei in ihr zusammenfallende Tangenten der Enveloppe, α ist ein Punkt derselben, dessen Tangente an die Umhüllungscurve zugleich Tangente an U_2 ist. Die den drei, durch den Mittelpunkt von U_2 gehenden Strahlen zugehörigen α-Punkte sind daher drei Berührungspunkte von U_2 mit der Enveloppe und bilden daher mit und φ zusammen die 8 Schnittpunkte von U_2 mit der Curve. Der Ort der Mittelpunkte U_2 berührt somit die Umhüllungscurve der Asymptoten in den Punkten, in welchen die Spitzentangenten die Curve schneiden.

13. Auch hier zeigt es sich, dass *jede Curve dritter Classe, für welche $K\infty$ Doppeltangente ist, als Umhüllungscurve der Asymptoten für unendlich viele Kegelschnittbüschel betrachtet werden kann*, dass durch dieselbe der Ort U_2 der Mittelpunkte, als ihre Cayley'sche Curve, aber sie nicht — umgekehrt — durch U_2 eindeutig bestimmt ist.

14. Dass mit der Umhüllungscurve der Asymptoten die der Axen eindeutig verknüpft ist, braucht nicht erst gezeigt zu werden, da ja durch die Asymptoten eines Kegelschnittes seine Axen eindeutig bestimmt sind. Ebenso ist leicht zu ersehen, dass mit der Umhüllungscurve der Axen zugleich die der Asymptoten gegeben ist. Denn auf ihrem Involutionskegelschnitte U_2 der senkrechten Tangenten sind jedem Punkte ein durch ihn gehendes senkrechtes Tangentenpaar zugeordnet, es ist das ihm als Mittelpunkt zugehörige, nunmehr bekannte Axenpaar, und das Asymptotenpaar des betreffenden Kegelschnittes wird als ein durch jenen Punkt hindurchgehendes Strahlenpaar eindeutig gewonnen, welches sowohl jenes Axenpaar, als auch auf $K\infty$ die Asymptotenrichtungen des Involutionskegelschnittes U_2 harmonisch trennt.

Es ist ersichtlich, dass in dieser Weise jeder Curve dritter Classe, für welche $K\infty$ Doppeltangente ist, dadurch, dass sie als Umhüllungscurve der Axen oder der Asymptoten betrachtet wird, zwei andere Curven derselben Art angehören, welche die zugehörige Umhüllungscurve der Asymptoten resp. der Axen bilden; im ersten Falle ist der Involutionskegelschnitt der senkrechten Tangenten der Fundamentalcurve der Cayley'sche Kegelschnitt der entsprechenden, im zweiten Falle tritt das Umgekehrte ein. Die zwei entsprechenden Curven einer Steiner'schen Hypocycloide fallen zusammen und zwar wieder in eine Steiner'sche Hypocycloide, weil für dieselbe der Cayley'sche Kegelschnitt mit dem Involutionskegelschnitte der senkrechten Tangenten identisch ist, und die Operation, durch welche man aus den Axen einer gleichseitigen Hyperbel seine Asymptoten findet, dieselbe ist, wie die, mittelst welcher man aus den Asymptoten die Axen herleitet. Die Steiner'schen Hypercycloiden der Ebene gruppiren sich also zu Paaren, die entsprechenden Hypocycloiden sind einander congruent, haben denselben Cayley'schen Kegelschnitt, und die eine entsteht aus der andern durch eine blosse Drehung der Spitzen um 180°; ein Kegelschnittbüschel, welches die eine als Umhüllungscurve der Axen, resp. der Asymptoten besitzt, besteht aus lauter gleichseitigen Hyperbeln und hat die andere zur Umhüllungscurve der Asymptoten resp. der Axen.

15. Bemerkenswerth ist noch, dass durch die Umhüllungscurve der Axen oder der Asymptoten die mit ihren ähnlichen Kegelschnitten zusammenfallenden, ausgezeichneten Kegelschnitte P_2 und Q_2 der zugehörigen Kegelschnittbüschel schon ihre Mittelpunkte erhalten, und dass daher auf U_2 auch die Involution der Mittelpunkte ähnlicher Kegelschnitte bestimmt ist. Auf dem Cayley'schen Kegelschnitte U_2 der Umhüllungscurve der Asymptoten ist nämlich der Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel Q_2 derjenige Punkt, in dem sich die zwei zu den Axen von U_2 parallelen conjugirten Tangenten schneiden, denn diese müssen bekanntlich die Asymptoten für Q_2 sein.

16. Die hier für die Asymptoten eines Kegelschnittbüschels gewonnenen Resultate lassen sich dahin verallgemeinern, dass statt $K\infty$ irgend eine Gerade der Ebene in derselben Weise, wie jene der

Untersuchung zu Grunde gelegt wird. Dann lauten die betreffenden Sätze:

Construirt man an die Kegelschnitte eines Büschels in ihren Schnittpunkten mit einer Geraden C_1 die Tangenten, so umhüllen diese eine Curve dritter Classe C^{III}, welche die Gerade in denjenigen zwei Punkten e, f berührt, in welchen sie von je einem Kegelschnitte des Büschels tangirt wird. Der Cayley'sche Kegelschnitt C_2 dieser Curve ist der Ort der Pole dieser Geraden bezüglich der Kegelschnitte des Büschels, und die Tangentenpaare, welche die einzelnen Kegelschnitte in ihren zwei Schnittpunkten mit der Geraden besitzen, bilden die conjugirten Tangenten. Die 6 Seiten des vollständigen Viereckes, welches durch die Basispunkte des Büschels gebildet wird, sind — als Tangenten der degenerirten Kegelschnitte in den Schnittpunkten mit der Geraden — auch Tangenten der Curve.

Jede rationale Curve dritter Classe kann als eine solche Umhüllungscurve C^{III} betrachtet werden; ihre Doppeltangente ist C_1, ihr Cayley'scher Kegelschnitt der Ort der Pole für die Gerade C_1 bezüglich der Kegelschnitte der noch unbestimmt gebliebenen Kegelschnittbüschel, welche zur Curve als Umhüllungscurve gehören.

Alle Kegelschnittbüschel, welche in dieser Weise mit jeder rationalen Curve dritter Classe verknüpft sind, haben die Eigenschaft, dass die einfachen Sechsseite der durch ihre Scheitel bestimmten vollständigen Vierecke der Curve dritter Classe selbst umschrieben sind, und jedes vollständige Viereck, dessen Sechsseit der Curve umschrieben ist, bildet die Scheitel für ein ihr zugehöriges Kegelschnittbüschel, welches mit der Doppeltangente in der angegebenen Weise die Curve erzeugt.

Eine Curve dritter Classe, welche durch eine Gerade C_1 als Doppeltangente und durch 6 Seiten eines vollständigen Viereckes bestimmt ist, fällt zusammen mit der Umhüllungscurve der Tangenten an die Kegelschnitte des durch das Viereck bestimmten Kegelschnittbüschels in ihren Schnittpunkten mit der Geraden C_1.

Natürlich gelten auch die reciproken Sätze: „Jede rationale Curve dritter Ordnung lässt sich als Ort der Berührungspunkte der aus ihrem Doppelpunkte an die Kegelschnitte gewisser Kegelschnittsreihen gezogenen Tangenten batrachten; das Sechseck des Basisvierseits für eine solche Kegelschnittsreihe ist der Curve eingeschrieben, und jedes solche Vierseit erzeugt mit dem Doppelpunkt in der angedeuteten Weise die Curve; der Cayley'sche Kegelschnitt derselben ist die Umhüllungscurve der Polaren des Doppelpunktes bezüglich der Elemente der Kegelschnittsreihe“ etc.